Feuille 4 : Fonctions usuelles, étude locale de fonctions

Fonctions circulaires réciproques

Exercice 1. Calculer les quantités suivantes :

(a) $\arcsin(\frac{1}{2})$

(b) $\arctan(\frac{-\sqrt{3}}{3})$,

(c) $\arcsin\left(\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$

(d) $\arctan\left(\tan(\frac{9\pi}{4})\right)$

(e) $\arcsin\left(\sin(\frac{-9\pi}{4})\right)$

(f) $\tan(\arctan(3))$

Exercice 2. Etudier et représenter les fonctions $\cos(\arccos x)$ et $\arccos(\cos x)$. Que valent $\arccos(\cos 5)$ et $\arccos(\cos 9)$?

Exercice 3. Montrer les égalités suivantes :

1. $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$, pour tout $x \in [-1, 1]$,
2. $\begin{cases} \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}, & \text{pour tout } x > 0, \\ \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}, & \text{pour tout } x < 0. \end{cases}$

Fonctions hyperboliques

Exercice 4. Etudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (parité, continuité, dérivabilité, limites à droite et à gauche en 0, limites en $\pm\infty$, tracé du graphe).

Exercice 5. Linéariser $\operatorname{ch}^3 x$ (*i.e.* l'écrire comme somme de $\operatorname{ch}(kx)$).

Exercice 6. Résoudre l'équation $3\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x = 4$.

Quelques études complètes de fonctions

Exercice 7. Faire l'étude complète des fonctions suivantes (domaine de définition, tableau de variation, limites).

(a) $f_1(x) = \sqrt{x}\ln x$

(b) $f_2(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$

(c) $f_3(x) = \ln(\ln x) - \frac{(\ln x)^2}{2}$

(d) $f_4(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$

Equivalents, développements limités, calculs de limites

Exercice 8. (*Croissances comparées et équivalents*)
Donner un équivalent des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$:

1. $f_1(x) = x + \cos x$,
2. $f_2(x) = x + \sin x$,
3. $f_3(x) = \sqrt{x} + \ln x$,
4. $f_4(x) = xe^x$,
5. $f_5(x) = x^4 + e^x$,
6. $f_6(x) = x^2 + \sin x$,
7. $f_7(x) = e^{2x} - \sqrt{x}$,
8. $f_8(x) = \operatorname{ch} x$,
9. $f_9(x) = \operatorname{sh} x$.

Exercice 9. Déterminer la limite en x_0 des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x} - 1$, $x_0 = 0$,

(b) $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2 x}$, $x_0 = 0$,

(c) $f(x) = \dfrac{x\ln(1+x)}{(\arctan x)^2}$, $x_0 = 0$,

(d) $f(x) = \dfrac{(1+x^2)\sin x}{\tan(5x)}$, $x_0 = 0$,

(e) $f(x) = \dfrac{\sin(2\pi x)}{\sin(5\pi x)}$, $x_0 = 1$,

(f) $f(x) = \ln x - \ln(x+1)$, $x_0 = +\infty$,

(g) $f(x) = x\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$, $x_0 = +\infty$,

(h) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, $x_0 = +\infty$,

(i) $f(x) = \left(1 + \dfrac{\ln x}{x}\right)^{\ln x}$, $x_0 = +\infty$.

Exercice 10. Ecrire les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \cos x\, \ln(1+x)$,
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{\cos x}$,
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{2+x}$,
4. $f_4(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$,
5. $f_5(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-\frac{x}{2}}$,
6. $f_6(x) = \sqrt{1+\sin x}$,
7. $f_7(x) = (1+2x)^{1/x}$,
8. $f_8(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

Exercice 11. (*Avec des paramètres*)

Etudier le comportement, quand x tend vers $+\infty$ de

$$f(x) = \sqrt{x^3 + ax^2 + x} - mx\sqrt{x+2}.$$

Discuter suivant les valeurs de a et m, et donner un équivalent de $f(x)$.

Exercice 12. Etudier la limite de f en a lorsque

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{2x(x-3)}$, $a = +\infty$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3\ln(x)}{2x^2\sqrt{1+x}}$, $a = +\infty$,

(c) $f(x) = (\pi - 2x)\tan(x)$, $a = \frac{\pi}{2}$,

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x^3+2x^2} - \dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^4+x^3}}$, $a = +\infty$,

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$, $a = e$,

Interprétation graphique de certaines propriétés

Exercice 13.

Soit α, a, et b trois réels donnés. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x-a|^\alpha + b.$$

1. Déterminer α, a, et b tels que le graphe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admette
   – une asymptote horizontale d'équation $y = 1$,
   – un axe de symétrie d'équation $x = 2$;
   – une tangente de pente $-\dfrac{1}{2}$ en au point d'abscisse 3.
2. Tracer le graphe de la fonction obtenue.
3. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec le graphe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{|x|} + 1$.

Exercice 14. (*Tangente et développement limité*)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant le développement limité suivant au voisinage de 1 :

$$f(x) = 1 + 2(x-1) - 4(x-1)^2 + \underset{x \to 1}{o}\left((x-1)^2\right).$$

1. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, au point d'abscisse 1 ?
2. Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente au voisinage du point d'abscisse 1 ?
3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse 1.

Exercice 15. (*Branches infinies*)
Etudier les branches infinies des courbes d'équation
1. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

On précisera s'il existe ou non des asymptotes, on donnera l'équation des asymptotes et la position relative de la courbe représentative de f et de ses asymptotes quand elles existent.

Exercices supplémentaires

Encore des équivalents, des DL, des limites

Exercice 16.
1. Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x+1}$.
2. Donner un équivalent en 0 de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\cos x - 1}$.

Exercice 17. Ecrire les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x}{\tan(x)}$,
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$,
3. $f_3(x) = \sqrt{1+\operatorname{sh}(x)}$,
4. $f_4(x) = \sqrt{1+\cos(x)}$.

Exercice 18. Etudier la limite de f en a lorsque

(a) $f(x) = \dfrac{\tan x\,(e^x - 1)}{(\sin x)^2}$, $a = 0$

(b) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$, $a = 1$,

(c) $f(x) = \dfrac{\ln(x) - \ln(x+1)}{\sin(1/x)}$, $a = +\infty$,

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^4 - x}$, $a = +\infty$,

(e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 2}$, $a = 2$,

(f) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3 + x^7 e^{-x}}{x + 2} - \dfrac{x^3 - 1}{1 + x}$, $a = +\infty$,

(g) $f(x) = (\dfrac{1 - x}{1 + x})^{\frac{1}{x}}$, $a = 0$

(h) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x) - \sin(x)}{\cos(x) - 1}$, $a = 0$

Exercice 19. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}_+$,

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$.

Etudes de fonctions et fonctions réciproques

Exercice 20.

On considère la fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\tan x} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\sin x < x$.
3. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Déterminer l'image de $[0, \frac{\pi}{2}]$ par f. On la notera J.
5. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur J. On la notera g.
6. Montrer que $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
7. Montrer que la fonction g est dérivable en $\dfrac{\pi}{4}$ et calculer $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 21.

1. On définit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x$. Etudier la parité et la monotonie de h. Montrer que la fonction h admet un mimimum global sur $\mathbb{R}$, que l'on calculera.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x > 0$.
3. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \operatorname{ch} x$. Faire l'étude complète de f et tracer son graphe.
4. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Soit g la fonction réciproque de f. Déterminer l'ensemble des points où g est dérivable.
6. Tracer la courbe de g.